

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАГАЛЬНИМИ НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ

Досліджена крайова задача з загальними двоточковими умовами за часом та умовами періодичності за просторовими координатами для параболічних за Г. Є. Шиловим рівнянь із постійними коефіцієнтами. Побудовано розв'язок у вигляді ряду Фур'є. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при розв'язуванні задачі.

Таку задачу досліджено в роботі [4, гл. 5] для безтипних рівнянь із частинними похідними, які не включають параболічних. Там подано також огляд і бібліографію робіт, які стосуються нелокальних задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними та для диференціально-операторних рівнянь. Серед досліджень за останній час, що приликають до цієї тематики, відмітимо праці [3, 5]. Нижче використовуватимемо позначення:

Ω^p – p -вимірний тор $\{x \in \mathbb{R}^p: 0 \leq x_r \leq 2\pi, r = \overline{1, p}\}$, $D = [0, T] \times \Omega^p$,

$k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \dots + |k_p|$,

$(k, x) = k_1 x_1 + \dots + k_p x_p$, $(k, k) = \|k\|^2$;

A_s^β , $s > 0$, $\beta > 0$, – банахів простір 2π -періодичних за кожним аргументом функцій $\varphi(x) = \sum_{|k| \geq 0} \varphi_k \exp(ik, x)$, для яких є скінченною

норма $\|\varphi\|_{s, \beta} = \sum_{|k| \geq 0} |\varphi_k| \exp(s|k|^\beta)$. Очевидно, що $A_s^\beta \subset \mathcal{G}_{(1/\beta)}$, де $\mathcal{G}_{(1/\beta)}$ –

клас Жевре 2π -періодичних функцій $v(x_1, \dots, x_p)$ порядку $1/\beta$ типу Берлінга [2, с. 113].

$C^{(n, q)}(D)$ – банахів простір функцій $u(t, x)$ з нормою

$$\|u\|_{C^{(n, q)}(D)} = \sum_{\substack{|v| \leq q \\ j \leq n}} \max_{(t, x) \in D} \left| \frac{\partial^{j+|v|} u(t, x)}{\partial t^j \partial x_1^{v_1} \dots \partial x_p^{v_p}} \right|.$$

$C^n([0, T], A_s^\beta)$ – простір функцій $v(t, x)$ таких, що $\partial^j v / \partial t^j$, $j = \overline{0, n}$, для кожного $t \in [0, T]$ належать до простору A_s^β і є неперервними по t в нормі A_s^β :

$$\|v\|_{C^n([0, T], A_s^\beta)} = \sum_{p=0}^n \max_{t \in [0, T]} \left\| \frac{\partial^p v}{\partial t^p} \right\|_{s, \beta}.$$

1. Розглянемо в області D задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n u + \sum_{\substack{|v| \leq q \\ j < n}} a_{jv} \frac{\partial^{j+|v|} u}{\partial t^j \partial x_1^{v_1} \dots \partial x_p^{v_p}} = 0, \quad (1)$$

$$B^0\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u \Big|_{t=0} - B^1\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u \Big|_{t=T} = \varphi(x), \quad (2)$$

де

$$B^i\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum_{\substack{|v| \leq q \\ j < n}} b_{vj}^i \frac{\partial^{j+|v|} u}{\partial t^j \partial x_1^{v_1} \dots \partial x_p^{v_p}};$$

$b_{vj}^i = \text{col}(b_{vj}^{1,i}, \dots, b_{vj}^{n,i})$, $b_{vj}^i \in \mathbb{C}^n$, $i = 0, 1$; $\varphi(x) = \text{col}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$; $a_{jv} \in \mathbb{R}$;
оператор L – параболический за Г. Є. Шиловим, тобто корені λ рівняння

$$P(\lambda; \eta) \equiv \lambda^n + \sum_{\substack{|v| \leq q \\ j < n}} a_{jv} i^{|v|} \eta_1^{v_1} \dots \eta_p^{v_p} \lambda^j = 0 \quad (3)$$

задовольняють $\forall \eta \in \mathbb{R}^p$ нерівність

$$\max_{1 \leq j \leq n} \text{Re} \lambda_j(\eta) \leq -c_1 |\eta|^h + c_2; \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad h > 0. \quad (4)$$

Вигляд області D накладає умови періодичності за змінними $x_1, \dots, x_p$ на шуканий розв'язок $u(t, x)$ та на функції $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1, n}$.

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} u_k(t) \exp(ik, x), \quad (5)$$

де $u_k(t)$ є розв'язком задачі

$$\begin{aligned} L\left(\frac{d}{dt}, ik\right) u_k(t) &= 0, \\ B^0\left(\frac{d}{dt}, ik\right) u_k(t) \Big|_{t=0} - B^1\left(\frac{d}{dt}, ik\right) u_k(t) \Big|_{t=T} &= \varphi_k, \end{aligned} \quad (6)$$

φ_k – коефіцієнти Фур'є вектор-функції $\varphi(x)$.

Припустимо, що $\forall \eta = k \in \mathbb{Z}^p$ корені $\lambda_j(k) = \lambda_j$, $j = \overline{1, n}$, рівняння (3) є прості. Тоді розв'язок задачі (6) зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{m=1}^n c_m(k) \exp(\lambda_m(k) t), \quad (7)$$

де сталі $c_m(k)$ визначаються з системи рівнянь

$$\sum_{m=1}^n c_m(k) \left(B^0(\lambda_m, ik) - \exp(\lambda_m T) B^1(\lambda_m, ik) \right) = \varphi_k, \quad (8)$$

визначник якої має вигляд

$$\Delta(k) \equiv \det \left\| B^0(\lambda_m, ik) - \exp(\lambda_m T) B^1(\lambda_m, ik) \right\|_{m=1}^n. \quad (9)$$

Теорема 1. Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) в просторі $C^{(n,q)}(D)$ необхідно й достатньо, щоб виконувалася умова

$$\Delta(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \quad (10)$$

Д о в е д е н н я впливає з теореми про єдиність розвинення періодичної функції в ряд Фур'є та проводиться за схемою доведення теореми 4.5 у [4, гл.5].

2. Припустимо, що розв'язок задачі (1), (2) єдиний. Тоді існує розв'язок задачі (6) $\forall k \in \mathbb{Z}^p$, який має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{m=1}^n \Delta_m(k) [\Delta(k)]^{-1} \exp(\lambda_m(k) t), \quad (11)$$

де $\Delta_m(k)$ – визначник, який отримуємо з $\Delta(k)$ заміною m -го стовпця на стовпець φ_k .

Зауважимо, що ряд (5), де функції $u_k(t)$ визначені формулами (11), взагалі, є розбіжний, оскільки вираз $|\Delta(k)|$, відмінний від нуля, може приймати як завгодно малі значення для нескінченного числа векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Тому існування розв'язку задачі пов'язане з проблемою малих знаменників.

Теорема 2. Нехай існують додатні сталі c_3, χ_1 такі, що для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p$ ($|k| > K_1$) виконується нерівність

$$|\Delta(k)| > c_3 |k|^{-\chi_1} \exp \left(T \sum_{m=1}^n \operatorname{Re} \lambda_m(k) \right). \quad (12)$$

Якщо $\varphi_m(x) \in A_s^\beta$, $m = \overline{1, n}$, де $s > c_4 T n$, $\beta = q$, то в просторі $C^{(n,q)}(D)$ існує розв'язок задачі (1), (2), який неперервно залежить від $\varphi(x)$.

Д о в е д е н н я. Для коренів рівняння (3) виконуються оцінки

$$|\lambda_m(k)| \leq c_4 |k|^q, \quad c_4 > 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}. \quad (13)$$

Враховуючи вигляд визначників $\Delta_m(k)$ та оцінки (4), при $|k| > K_2$ ($K_2 = (c_2/c_1)^{1/h}$) отримуємо

$$|\Delta_m(k)| \leq c_5 |k|^{q(n-1)} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq m}}^n |\lambda_\alpha(k)|^{n-1} \sum_{\alpha=1}^n |\varphi_{\alpha k}|. \quad (14)$$

На підставі формул (5), (11) та нерівностей (12)–(14) дістаємо

$$\|u\|_{C^{(n,q)}(D)} \leq c_6 \sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{|k| \leq K} |\varphi_{\alpha k}| + \sum_{|k| > K} |\varphi_{\alpha k}| \|k\|^\eta \exp(c_4 T n |k|^q) \right), \quad (15)$$

де $\eta = q(n^2 + 1) + \chi_1$, $K = \max\{K_1, K_2\}$. Із (15) випливає, що

$$\|u\|_{C^{(n,q)}(D)} \leq c_7 \sum_{\alpha=1}^n \|\varphi_\alpha\|_{s,\beta}, \quad \beta = q, \quad s > c_4 T n.$$

Теорема доведена.

3. Проаналізуємо, наскільки багата множина задач (1), (2), для яких справджуються нерівності (12). Розкривши визначник (9), отримуємо, що при $|k| > K_3$

$$|\Delta(k)| \geq c_8 \prod_{1 \leq \beta < \alpha \leq n} |\lambda_\alpha - \lambda_\beta| \cdot \left| \det \tilde{B}^0 - \exp \left(T \sum_{m=1}^n \operatorname{Re} \lambda_m \right) \det \tilde{B}^1 \right|, \quad (16)$$

$$\text{де } \tilde{B}^p(k) = \left\| \sum_{|v| \leq q} \psi(v, k) b_{vj}^{i,p} \right\|_{\substack{i=1, n \\ j=0, n-1}}; \quad \psi(v, k) = i^{|v|} k_1^{v_1} \dots k_p^{v_p}.$$

Позначимо через $y = (y_1, \dots, y_\gamma)$ вектор, складений із коефіцієнтів рівняння (1), де γ – число всіх коефіцієнтів.

Лема. Для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^\gamma$) векторів y виконується нерівність

$$\prod_{1 \leq \beta < \alpha \leq n} |\lambda_\alpha(k) - \lambda_\beta(k)| \geq c_9 |k|^{(n-1)(q-p)/2-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (17)$$

для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Д о в е д е н н я л е м и проводиться за схемою доведення теореми 6 із [1] і базується на тому, що дискримінант $D(P)$ характеристичного полінома

$$P(\lambda; k) \equiv \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j P_j(k, a_{j_v})$$

можна зобразити як через коефіцієнти $P_j(k, a_{j_v})$ (у вигляді визначника), так і через корені $\lambda_j(k)$ полінома $P(\lambda; k)$:

$$D(P) = \prod_{1 \leq l < q \leq n} (\lambda_q(k) - \lambda_l(k))^2.$$

$$\text{Позначимо } b_1 = \text{Re } \underbrace{b_{q,0,\dots,0,0}^{1,1}}_p; \quad b_2 = \text{Re } \underbrace{b_{q,0,\dots,0,1}^{2,1}}_p; \quad \dots; \quad b_n = \text{Re } \underbrace{b_{q,0,\dots,0,n-1}^{n,1}}_p$$

і припустимо, не порушуючи загальності, що $|k_1| = \max_{1 \leq i \leq p} |k_i|$.

На основі оцінок (16), (17) отримуємо, що для майже всіх векторів y і для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ ($|k| > K_4(y)$) виконується нерівність

$$\left| \frac{\partial^n \Delta(k)}{\partial b_1 \dots \partial b_n} \right| \geq c_{10} \|k\|^{\eta_1} \exp \left(T \sum_{m=1}^n \text{Re } \lambda_m \right), \quad (18)$$

$$\eta_1 = (n-1)(q-p)/2 + qn - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Теорема 3. Для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $b = (b_1, \dots, b_n)$ і для майже всіх (відносно міри Лебега в $\mathbb{R}^p$) векторів $y = (y_1, \dots, y_p)$ виконується нерівність (12) при $\chi_1 > (p-q)(3n-1)/2 + \varepsilon$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Д о в е д е н н я. Позначимо через B множину тих векторів $b \in \mathbb{R}^n$, для яких протилежна нерівність

$$|\Delta(k)| < c_3 |k|^{-\chi_1} \exp \left(T \sum_{m=1}^n \text{Re } \lambda_m(k) \right) \quad (19)$$

має нескінченне число розв'язків у цілих числах $k_1, \dots, k_p$ для майже всіх векторів y . За лемою 2.3 [4, гл.1] міра B_k тих векторів $b \in \mathbb{R}^n$, для яких нерівність (19) виконується для майже всіх векторів y при фіксованому k ($|k| > K_4(y)$), не перевищує $c_n |k|^{(-\chi_1 - \eta_1)/n}$. Оскільки ряд $\sum_{|k| \geq 0} |B_k|$ збігається при $\chi_1 > np - \eta_1$, то за лемою 2.1 [4, гл.1] міра мно-жини B дорівнює нулю. Це й доводить теорему.

4. Отримані вище результати можна перенести на випадок, коли рівняння (3) має кратні корені. Нехай $\lambda_1(k), \dots, \lambda_{p(k)}(k)$ – корені цього рівняння кратностей $M_1(k), \dots, M_{p(k)}(k)$, $\sum_{j=1}^{p(k)} M_j = n$. У цьому випадку розв'язок задачі (1), (2) формально запишемо у вигляді:

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} \sum_{m=1}^{p(k)} \sum_{s_m=1}^{M_m} c_{m,s_m} t^{s_m-1} \exp(\lambda_m t + i(k, x)), \quad (20)$$

де

$$c_{m,s_m}(k) = \Delta_{m,s_m}(k) [\Delta(k)]^{-1};$$

$$\Delta(k) \equiv \det \left\| (B^0)^{(s_m)}(\lambda_m, ik) - \exp(\lambda_m T) \sum_{r=0}^{s_m} C_{s_m}^r T^{s_m-r} (B^1)^{(r)}(\lambda_m, ik) \right\|_{\substack{m=1, \overline{p(k)} \\ s_m=0, \overline{M_m-1}}};$$

$$(B^i)^{(\alpha)}(\lambda_m, ik) = \frac{d^\alpha B^i(\lambda, ik)}{d\lambda^\alpha} \Big|_{\lambda=\lambda_m}, \quad i = 0, 1; \quad \Delta_{m,s_m}(k) - \text{визначник, який}$$

отримуємо з $\Delta(k)$ заміною стовпця з номером $\sum_{\alpha=1}^{m-1} M_\alpha(k) + s_m$ на стовпець Φ_k .

Теорема 4. Нехай існують додатні сталі c_{11}, χ_2 такі, що для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p, |k| > K_5$, виконується нерівність

$$|\Delta(k)| \geq c_{11} |k|^{-\chi_2} \exp \left(T \sum_{m=1}^{p(k)} M_m(k) \operatorname{Re} \lambda_m(k) \right). \quad (21)$$

Якщо $\varphi_m(x) \in A_s^\beta, m = \overline{1, n}, s > c_4 T n, \beta = q$, то в просторі $C^{(n,q)}(D)$ існує розв'язок задачі (1), (2), який неперервно залежить від $\varphi(x)$.

Д о в е д е н н я. Для всіх $k \in \mathbb{Z}^p, |k| > K_2$, справджуються оцінки

$$|\Delta_{m,s_m}(k)| \leq c_{12} |k|^{q(n-1)} \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha \neq m}}^{p(k)} |\lambda_\alpha(k)|^{(n-1)M_\alpha} |\lambda_m(k)|^{(n-1)(M_m-1)} \sum_{\alpha=1}^n |\varphi_{\alpha k}|, \quad (22)$$

$$s_m = \overline{1, M_m(k)}, \quad m = \overline{1, p(k)}.$$

Із формули (20) та оцінок (21), (22) випливає нерівність

$$\|u\|_{C^{(n,q)}(D)} \leq c_{13} \sum_{\alpha=1}^n \left(\sum_{|k| \leq K_6} |\varphi_{\alpha k}| + \sum_{|k| > K_6} |\varphi_{\alpha k}| \|k\|^{\eta_2} \exp(c_4 T n |k|^q) \right), \quad (23)$$

$$\eta_2 = q(n^2 + 1) + \chi_2, \quad K_6 = \max\{K_2, K_5\}.$$

Зважаючи на (23), дістаємо оцінку $\|u\|_{C^{(n,q)}(D)} \leq c_{14} \sum_{\alpha=1}^n \|\varphi_\alpha\|_{s,\beta}$,

$s > c_4 T n, \beta = q$, з якої випливає доведення теореми.

Робота виконана в рамках проекту з фундаментальних досліджень ДКНТ України.

1. Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О. Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
2. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 284 с.
3. Муравей Л. А., Филиновский А. В. Об одной задаче с нелокальным граничным условием для параболического уравнения // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 10. – С. 1479–1512.
4. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
5. Фардигла Л. В. Коректні задачі у шарі з диференціальними операторами в крайовій умові // Укр. мат. журн.. – 1992. – **44**, № 8. – С. 1083–1090.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОБЩИМИ НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Исследована краевая задача с общими двухточечными условиями по времени и условиями периодичности по пространственным координатам для параболических по Г. Е. Шилову уравнений с постоянными коэффициентами. Построено решение в виде ряда Фурье. Установлены условия существования и единственности классического решения задачи. Доказаны метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, которые возникают при построении решения.

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH GENERAL NONLOCAL CONDITIONS

The boundary value problem with general time two-point conditions and periodical conditions on the space variables for equations parabolic by Shilov with constant coefficients is investigated. The problem solution in the form of Fourier series is constructed. Conditions of existence and uniqueness of classical problem solution are established. The metric theorems on lower bounds of small denominators, which are appearing in solving of the problem, are proved.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів.

Одержано
03.02.93.