

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗКЛАДНОСТІ МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

Наведено огляд досліджень з питань розкладності матричних многочленів на множники. Основна увага приділена результатам, які отримані П. С. Казімірським на шляху до розв'язання проблеми виділення регулярних множників із матричного многочлена над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль.

Систематичне та досить інтенсивне вивчення матричних многочленів стосовно їх розкладності на множники почалося з другої половини нашого століття і було зв'язане в основному із задачами, які виникають у теорії диференціальних рівнянь [32], в теорії операторних пучків [30, 31], у прикладних напрямках: коливні [45] і динамічні системи [1], оптимальне керування [2] та ін. У роботах Ланкастера, Лангера, Віммера, Денніса, Трауба, Вебера, Гохберга, Родмана, Маркуса, Мереуци, Малишева, Якубовича та ін. питання розкладності матричних многочленів на множники при тих чи інших обмеженнях досліджуються методами, які ґрунтуються на класичних поняттях власних векторів та жорданових ланцюгів.

П. С. Казімірським запропонований новий підхід до вивчення цих питань. На основі введених ним фундаментальних понять значення многочленної матриці на системі коренів многочлена, супровідної матриці, півскалярної еквівалентності многочленних матриць були розроблені алгебраїчні методи розкладності матричних многочленів на множники, які знаходять також ефективне застосування і при дослідженні інших питань теорії многочленних матриць, зокрема подібності матричних многочленів і скінчених наборів числових матриць, їх звідності до простіших виглядів. Дана стаття присвячена оглядові основних результатів, одержаних П. С. Казімірським при розробці теорії розкладності матричних многочленів на множники. Виклад матеріалу в міру необхідності подаватимемо в сучасній термінології, не дотримуючись часом мови оригіналу, що обумовлено бажанням формулювати деякі результати в найбільш загальному вигляді.

1. Значення многочленної матриці на системі коренів многочлена.

Надалі вважатимемо, що $\mathcal{P}$ – алгебраїчно замкнене поле нульової характеристики. Нехай $G(x)$ – многочленна $m \times n$ -матриця над $\mathcal{P}[x]$, $\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \dots (x - \alpha_r)^{k_r}$ – многочлен із $\mathcal{P}[x]$, записаний у канонічному вигляді.

Значенням многочленної матриці $G(x)$ на системі коренів многочлена $\varphi(x)$ називається числова матриця вигляду

$$M_{G(x)}(\varphi) = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_r \end{bmatrix}, \quad H_i = \begin{bmatrix} G(\alpha_i) \\ G'(\alpha_i) \\ \vdots \\ G^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{bmatrix},$$

$i = 1, \dots, r$, де $G^{(l)}(x)$ – похідна l -го порядку матриці $G(x)$. Це важливе в теорії розкладності матричних многочленів на множники поняття введено П. С. Казімірським у 1964 р. [18, 8] і знайшло також використання при дослідженні звідності матричних многочленів перетворенням подібності до клітково-трикутного та клітково-діагонального виглядів [14, 26].

2. Лінійні унітальні дільники матричного многочлена з заданими характеристичними многочленами. Розглянемо матричний многочлен $A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s$, $A_i \in \mathcal{P}_n$, $i = 0, 1, \dots, n$, над полем $\mathcal{P}$ і відповідне йому матричне многочленне рівняння $A(Z) = 0$, де $A(Z) = Z^s A_0 + Z^{s-1} A_1 + \dots + A_s$. Нагадаємо, що матричний многочлен $A(x)$ називається регулярним, якщо $\det A_0 \neq 0$, і унітальним, якщо $A_0 = E$ – одинична матриця; $\Delta(x) = \det A(x)$ називається характеристичним многочленом, а корені $\Delta(x)$ – характеристичними коренями $A(x)$.

При відсутності загального підходу багато авторів розглядали лише окремі типи матричних многочленних рівнянь [46], зокрема Келі, Сільвестр, Фробеніус досліджували двочленні матричні рівняння ще в минулому столітті (див. бібліографію в [46]). Встановлена узагальнена теорема Безу [44] дала можливість звести розв’язування матричних многочленних рівнянь $A(Z) = 0$ до знаходження лівих лінійних унітальних дільників матричних многочленів $A(x)$ [42, 43]. Тому методи розкладності матричних многочленів на множники дають загальний підхід до розв’язування матричних многочленних односторонніх рівнянь, а також певних типів матричних алгебраїчних рівнянь Ріккаті, які зводяться до матричних квадратних односторонніх рівнянь.

Перші праці П. С. Казімірського присвячені встановленню умов існування лінійних регулярних дільників матричних многочленів. У роботах [18, 8, 21] вказано достатні умови існування лінійних регулярних дільників матричного многочлена із заданими характеристичними многочленами, виділено класи дільників, для яких ці умови є і необхідними. Зрозуміло, що замість регулярних достатньо розглянути унітальні дільники матричних многочленів. Основним результатом тут є наступна

Теорема 1. *Нехай $\varphi(x)$, $\deg \varphi = n$, – унітальний дільник характеристичного многочлена $\Delta(x) = \det A(x) \neq 0$ матричного многочлена $A(x)$, тобто $\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x)$ і $(\varphi(x), \psi(x)) = \delta(x)$; $d_{n-1}^A(x)$ – найбільший спільний дільник мінорів $(n-1)$ -го порядку матриці $A(x)$. Якщо $(\delta(x), d_{n-1}^A(x)) = 1$, то матричний многочлен $A(x)$ має лівий унітальний лінійний дільник $B(x)$ з характеристичним многочленом $\det B(x) = \varphi(x)$ у тому й тільки в тому випадку, коли ранг матриці значень взаємної матриці $A_*(x)$ на системі коренів многочлена $\varphi(x)$ дорівнює n : $\text{rang } M_{A_*(x)}(\varphi) = n$.*

Ця теорема повністю розв’язує задачу про існування лінійних унітальних дільників матричного многочлена $A(x)$, $\det A(x) \neq 0$, елементарні дільники якого попарно взаємно прості, та дає відповідь на питання про розв’язність відповідного матричного рівняння [9].

3. Дільники довільного степеня матричного многочлена. Для опису нелінійних дільників матричного многочлена введено поняття супровідної матриці [20, 25].

Нехай $\varphi(x)$, $\deg \varphi = nr$, – дільник характеристичного многочлена $\Delta(x)$ матричного многочлена $A(x)$, тобто $\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x)$. Матричному многочлену $A(x)$ і дільнику $\varphi(x)$ його характеристичного многочлена $\Delta(x)$ ставиться у відповідність матриця $A_{r-1}(x) = A_*(x) \parallel E, Ex, \dots, Ex^{r-1}$, яка названа супровідною, де $A_*(x)$ – взаємна матриця. Встановлено: якщо $\text{rang } M_{A_{r-1}(x)}(\varphi) = nr$, то існує унітальний дільник $B(x)$ матричного многочлена $A(x)$ степеня r з характеристичним многочленом $\det B(x) = \varphi(x)$. Ця умова існування унітальних дільників із характеристичним

многочленом $\varphi(x)$ виявилась і необхідною у випадку, коли $(\varphi(x), \psi(x)) = 1$ [20].

У роботі [22] клас унітальних дільників, для існування яких сформульована умова є і необхідною, розширено також і на випадок, коли $(\varphi(x), \psi(x)) \neq 1$.

Теорема 2. Нехай $\varphi(x)$, $\deg \varphi = nr$, – дільник характеристичного многочлена $\Delta(x) = \det A(x) \neq 0$, тобто $\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x)$ і $(\varphi(x), \psi(x)) = \delta(x)$. Якщо $(\delta(x), d_{n-1}^A(x)) = 1$, то для того щоб існував лівий унітальний дільник $B(x)$ матричного многочлена $A(x)$ степеня r з характеристичним многочленом $\det B(x) = \varphi(x)$, необхідно та достатньо, щоб $\text{rang } M_{A_{r-1}(x)}(\varphi) = nr$.

З цієї теореми як наслідок випливає важлива в теорії розкладності матричних многочленів на множники теорема про регуляризацию.

Теорема 3. Для того щоб матричний многочлен $A(x)$ регуляризувався справа, тобто щоб існувала матриця $R(x) \in GL_n(\mathcal{P}[x])$ така, що $A(x)R(x)$ – регулярний многочлен, необхідно та достатньо, щоб $\deg \Delta(x) = ns$ і $\text{rang } M_{A_{s-1}(x)}(\Delta) = nr$, де $\Delta(x) = \det A(x)$.

У цій же роботі вказано спосіб знаходження коефіцієнтів унітального дільника матричного многочлена.

Нехай $\text{rang } M_{A_{r-1}(x)}(\varphi) = nr$. Тоді існує унітальний дільник $B(x) = E x^r - B_1 x^{r-1} - \dots - B_r$ з характеристичним многочленом $\det B(x) = \varphi(x)$ матричного многочлена $A(x)$. Коефіцієнти дільника $B(x)$ знаходять як розв'язки $Y_1 = B_1, \dots, Y_{r-1} = B_{r-1}, Y_r = B_r$ лінійного матричного рівняння

$$M_{A_{r-1}(x)}(\varphi) \begin{pmatrix} Y_r \\ Y_{r-1} \\ \vdots \\ Y_1 \end{pmatrix} = M_{A_s(x)x^r}(\varphi). \quad (1)$$

Для кожного фіксованого дільника $\varphi(x)$ характеристичного многочлена $\Delta(x) = \det A(x)$ розв'язок рівняння (1) єдиний, а отже, й унітальний дільник $B(x)$ матричного многочлена $A(x)$ із заданим характеристичним многочленом $\det B(x) = \varphi(x)$ – єдиний.

Такого типу дільники із заданими характеристичними многочленами матричних многочленів над довільним полем $\mathcal{P}$ описані в роботі [37], а над полем довільної характеристики – в [39].

4. Паралельні розклади матричних многочленів. Нехай характеристичний многочлен $\Delta(x)$ унітального матричного многочлена $A(x)$ зображений у вигляді добутку

$$\Delta(x) = \varphi_1(x) \dots \varphi_k(x), \quad \deg \varphi_i = n r_i, \quad (2)$$

$i = 1, \dots, k$. Розклад на множники

$$A(x) = B_1(x) \dots B_k(x) \quad (3)$$

матричного многочлена $A(x)$ такий, що $\det B_i(x) = \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, названо паралельним до розкладу (2) його характеристичного многочлена [10]. П. С. Казімірський встановив критерій існування паралельних розкладів матричних многочленів на лінійні унітальні множники спочатку для випадку, коли характеристичні многочлени множників попарно взаємно прості [8, 19], а потім і для ширших випадків [23]. Ці результати неважко сформулювати для паралельних розкладів матричних многочленів на унітальні множники довільних степенів.

Теорема 4. Нехай характеристичний многочлен $\Delta(x)$ унітального матричного многочлена $A(x)$ зображений у вигляді (2), причому $(\delta_{ij}(x), d_{n-1}^A(x)) = 1$ для всіх $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$, де $\delta_{ij}(x) = (\varphi_i(x), \varphi_j(x))$. Тоді існує розклад (3) матричного многочлена $A(x)$ на унітальні множники $B_i(x)$ степенів r_i , паралельний до розкладу (2) його характеристичного многочлена $\Delta(x)$, у тому й тільки в тому випадку, коли $\text{rang } M_{A_{(r_1+\dots+r_j)-1}(x)}(\varphi_1 \dots \varphi_j) = (r_1 + \dots + r_j)n$ для всіх $j = 1, \dots, k-1$. У випадку існування розклад (3) матричного многочлена $A(x)$ на унітальні множники, паралельний до фіксованого розкладу (2) його характеристичного многочлена, єдиний.

5. Про розкладність матричних многочленів на лінійні множники. В роботах [19, 23, 29] вказано умови розкладності матричних многочленів на лінійні унітальні множники з заданими характеристичними многочленами. Виникає задача: виділити класи матричних многочленів, які завжди розкладаються на лінійні унітальні множники.

П. Ланкастером [45] запропоновано метод розкладу многочленних матриць малих степенів (2, 3, 4) на лінійні унітальні множники простої структури (елементарні дільники яких лінійні), характеристичні многочлени яких попарно взаємно прості. В роботі [10] П. С. Казімірським встановлено критерій існування лінійних унітальних дільників простої структури многочленної матриці в загальному випадку: многочленна матриця порядку n має лівий лінійний унітальний дільник простої структури тоді й тільки тоді, коли існують n лінійно незалежних її лівих власних векторів. Доведена така

Теорема 5. Унітальна многочленна матриця простої структури розкладна в добуток лінійних унітальних множників.

З цієї теореми випливає, що унітальна многочленна матриця без кратних характеристичних коренів розкладна в добуток лінійних унітальних множників. У роботі [16] цей результат узагальнено: унітальна многочленна матриця, характеристичні корені якої мають кратність не більшу 2, розкладна на лінійні унітальні множники. В [40] встановлена розкладність на лінійні унітальні множники так званих многочленних матриць квазіпростої структури.

6. Про число дільників матричного многочлена. В умовах теореми 2 унітальний дільник матричного многочлена із заданим його характеристичним многочленом є єдиним. У роботі [4] доведено, що ці умови є і необхідними для єдиності унітального дільника матричного многочлена із заданим його характеристичним многочленом.

Теорема 6. Нехай $B(x)$ - унітальний дільник матричного многочлена $A(x)$, тобто $A(x) = B(x)C(x)$ і $(\det B(x), \det C(x)) = \delta(x)$. Тоді унітальний дільник $B(x)$ матричного многочлена $A(x)$ із характеристичним многочленом $\det B(x) = \varphi(x)$ є єдиним у тому й тільки в тому випадку, коли $(\delta(x), d_{n-1}^A(x)) = 1$.

У роботі [43] виділено матричні односторонні рівняння та многочлени, які мають нескінченне число розв'язків і лінійних унітальних дільників. Із теореми 6 випливає, що матричні многочлени $A(x)$, елементарні дільники яких попарно прості, можуть мати лише скінченне число унітальних дільників, а отже, й матричні рівняння $A(Z) = 0$ матимуть лише скінченне число розв'язків. Зокрема, унітальний матричний многочлен без кратних характеристичних коренів завжди має лінійні унітальні дільники, а їх число скінченне. Тому виникає питання, яким це число може бути.

П. С. Казімірським у роботі [10] доведено існування унітальних матричних многочленів без кратних характеристичних коренів, які володіють властивістю так званої лівої абсолютної виділеності лінійних унітальних множників, тобто таких матричних многочленів $A(x)$, що для кожного дільника $\varphi(x)$, $\deg \varphi = n$, характеристичного многочлена $\Delta(x) = \det A(x)$ існує лівий лінійний унітальний дільник $B(x)$ матричного многочлена $A(x)$ із характеристичним многочленом $\det B(x) = \varphi(x)$. Такі матричні многочлени мають максимально можливе число $k = \binom{s n}{n}$ лівих лінійних унітальних дільників, s – степінь матричного многочлена $A(x)$.

У роботі [33] вивчаються абсолютно розкладні матричні многочлени. Встановлено критерій абсолютної розкладності матричних многочленів без кратних характеристичних коренів, доведено існування таких многочленів. У роботі [34] встановлена нижня межа $k = s^n$ для числа лінійних унітальних дільників матричного многочлена без кратних характеристичних коренів, досліджена їх структура залежно від числа лінійних дільників. Таким чином, число k лінійних унітальних дільників матричного многочлена без кратних характеристичних коренів задовольняє умову: $s^n \leq k \leq \binom{s n}{n}$.

7. Півскалярна еквівалентність многочленних матриць. У 1976 р. П. С. Казімірським та одним із його учнів [28] введено поняття півскалярної еквівалентності многочленних матриць і встановлена спеціальна трикутна форма, до якої зводяться відповідними перетвореннями многочленні матриці над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль. Ця форма відіграє важливу роль при побудові методів розкладності матричних многочленів на множники [11, 12, 35], дослідженні подібності матричних многочленів і скінченних наборів числових матриць [13, 15, 41].

Многочленні матриці $A(x)$ і $B(x)$ називають півскалярно еквівалентними, якщо існують такі матриці $Q \in GL_n(\mathcal{P})$ і $R(x) \in GL_n(\mathcal{P}[x])$, що $A(x) = Q B(x) R(x)$.

Теорема 7 [28]. Нехай $A_1(x), \dots, A_k(x)$ – многочленні $m \times n$ -матриці ($m \leq n$), причому $\text{rang } A_i(x) = m$, $i = 1, \dots, k$, $\varepsilon_j^{(i)}(x)$, $j = 1, \dots, m$, – інваріантні множники матриці $A_i(x)$, $i = 1, \dots, k$. Тоді існують такі матриці $Q \in GL_n(\mathcal{P})$ і $R_i(x) \in GL_n(\mathcal{P}[x])$, $i = 1, \dots, k$, що

$$Q A_i(x) R_i(x) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{(i)}(x) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \varepsilon_2^{(i)}(x) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & & \dots\dots\dots & & \\ * & & & & \varepsilon_m^{(i)}(x) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Із цієї теореми як наслідок випливає відомий результат [44]: якщо $A(x) = B(x)C(x)$, то інваріантні множники матриці $A(x)$ діляться на відповідні інваріантні множники матриць $B(x)$ і $C(x)$.

Зауважимо, що в роботі [35] ці результати про півскалярну еквівалентність поширено для многочленних матриць над довільним полем.

8. Про розкладність матричного многочлена на множники із заданими канонічними діагональними формами. Встановлення півскалярної еквівалентності матричних многочленів і трикутної форми з інваріантними множниками на головній діагоналі дало змогу знайти принципово

новий підхід до питання виділення з них унітальних множників. Суть його полягає в наступному. Нехай

$$D^A(x) = P(x)A(x)Q(x) = \text{diag}(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)) \quad (4)$$

– канонічна діагональна форма (к.д.ф.) матриці $A(x)$; $P(x), Q(x) \in GL_n(\mathcal{P}[x])$. Треба знайти умови розкладу $A(x) = B(x)C(x)$ матричного многочлена $A(x)$, де $B(x)$ – унітальний матричний многочлен степеня r . Оскільки згідно із зауваженням у попередньому пункті к.д.ф. $D^A(x)$ матриці $A(x)$ ділиться на к.д.ф. $D^B(x)$ множника $B(x)$:

$$D^A(x) = \text{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) \text{diag}(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)), \quad (5)$$

де $\varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x)$, $i = 1, \dots, n-1$, $\sum_{i=1}^n \deg \varphi_i = nr$, то ставимо задачу про існування та знаходження лівого унітального множника $B(x)$ з к.д.ф. $\Phi(x) = \text{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$.

Теорема 8. Нехай к.д.ф. матричного многочлена $A(x)$ допускає розклад (5), у якому $\varphi_i(x) \mid \varphi_{i+1}(x)$, $\psi_i(x) \mid \psi_{i+1}(x)$ для всіх $i = 1, \dots, n-1$. Тоді необхідною та достатньою умовою для того, щоб $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x)$ – унітальний матричний многочлен степеня r , $D^B(x) = \text{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $D^C(x) = \text{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n)$, є умова

$$\text{rang } M_{\text{diag}\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \dots, \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, 1\right)P(x) \| E, Ex, \dots, Ex^{r-1} \| (\varphi_n) = nr,$$

де $P(x) \in GL_n(\mathcal{P}[x])$ – довільна матриця із співвідношення (4), причому для кожного фіксованого розкладу (5) такий розклад єдиний [3, 11, 27].

У роботі [5] теорема 8 поширена на випадок розкладу матричного многочлена в добуток лінійних унітальних множників, а в [35] ця задача розглянута для матричних многочленів над довільним полем.

Наступним кроком у цьому напрямі було розв'язання задачі про розклад матричного многочлена $A(x)$ на множники: $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x)$ – унітальний, паралельно до розкладу (5) його к.д.ф. $D^A(x)$, тобто такий розклад, у якому $B(x)$ еквівалентний $\text{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, а $C(x)$ еквівалентний $\text{diag}(\psi_1(x), \dots, \psi_n(x))$. Ця задача була розв'язана в роботі [6] для матричних многочленів над полем $\mathbb{C}$, а пізніше в роботі [36] узагальнена на випадок довільного поля.

9. Виділення унітальних множників із матричного многочлена. В 1978 р. П. С. Казімірським розв'язано проблему виділення регулярного множника із матричного многочлена над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль, тобто встановлено критерій існування таких множників з наперед заданими канонічними формами, а також вказано метод їх безпосереднього знаходження [12, 24].

Нехай $\Phi(x) = \text{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ – деяка фіксована матриця із розкладу (5) к.д.ф. $D^A(x)$ матричного многочлена $A(x)$. Побудуємо так звану визначальну матрицю, породжену матрицею $\Phi(x)$:

$$W(\Phi) = \left\| \begin{array}{cccccc} \varphi & & & & & 0 \\ (\varphi_1, \varepsilon_1) & & & & & \\ \varphi k_{21} & \varphi & & & & \\ (\varphi_2, \varepsilon_1) & (\varphi_2, \varepsilon_2) & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \varphi k_{n1} & \varphi k_{n2} & \dots & \varphi k_{n,n-1} & \varphi & \\ (\varphi_n, \varepsilon_1) & (\varphi_n, \varepsilon_2) & \dots & (\varphi_n, \varepsilon_{n-1}) & (\varphi_n, \varepsilon_n) & \end{array} \right\|,$$

де $(\varphi_i, \varepsilon_j)$ – найбільший спільний дільник многочленів φ_i та ε_j ,
 $i, j = 1, \dots, n, i \geq j$; якщо $\frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} = 1$, то $k_{ij} = 0$, якщо ж $\frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} \neq 1$, то
 $k_{ij} = k_{ij0} + k_{ij1}x + \dots + k_{ijh_{ij}}x^{h_{ij}}$, де $h_{ij} = \deg \frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} - 1, i = 2, \dots, n, i > j$,
 $j = 1, \dots, n-1$; k_{ijs} – попарно різні змінні, приєднані до основного поля
 $\mathcal{P}$; $s = 1, 2, \dots, h_{ij}$; $\varphi = \det \Phi(x)$.

Теорема 9. Для того щоб матричний многочлен $A(x)$ міг бути зображений у вигляді $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x)$ – унітальний матричний многочлен степеня r з к.д.ф. Φ , необхідно й достатньо, щоб

$$\text{rang } M_{W(\Phi)P(x)} \parallel_{E, Ex, \dots, Ex^{r-1}} (\varphi) = nr \quad (6)$$

для довільної фіксованої оборотної матриці $P(x)$ із співвідношення (4).

Унітальні множники $B(x)$ конструктивно знаходяться за методикою, висвітленою в п. 3, і залежать від скінченної кількості незалежних змінних k_{ij} . Надаючи їм допустимих значень із основного поля $\mathcal{P}$, одержуємо розклади матричного многочлена над цим полем. Дещо громіздка за формою матриця (6) у роботі [7] була спрощена, а потім суттєво модифікована шляхом введення визначальної матриці та поняття значення многочленної матриці на системі коренів елементів діагональної матриці [17].

Питання про єдиність унітальних множників із заданими к.д.ф. досліджувалось у роботах [17] і [7]. Доведено, що унітальний множник із заданою к.д.ф. Φ із співвідношення (4) єдиний тоді й тільки тоді, коли $(\varphi_i, \varepsilon_j) = \varphi_j$ для всіх $i > j$.

Одержані результати про виділення унітальних множників із матричних многочленів дають можливість вказати методи розв'язування матричних многочленних рівнянь. На їх основі в роботі [38] побудовано алгоритм знаходження розв'язків многочленних матричних рівнянь і викладено його практичну реалізацію на ЕОМ.

1. Алиев Ф. А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. – Баку: ЭЛМ, 1989. – 320 с.
2. Андреев В. А., Шепелявый А. И. Синтез оптимальных управлений для амплитудно-импульсных систем в задаче минимизации среднего значения функционала квадратичного типа // Сиб. мат. журн. – 1973. – **14**, № 2. – С. 250–276.
3. Борович З. И. О факторизации матриц над кольцом главных идеалов // III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей, Тарту, 21–24 сент. 1976г.: Тез. докл. – Тарту: Тарт. ун-т, 1976. – С. 19.
4. Грига Б. С., Казимирський П. С. До питання єдиності виділення унітального множника з матричного многочлена // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1976. – № 4. – С. 293–295.
5. Зелиско В. Р. О разложении матричного многочлена в произведение линейных множителей // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 6. – С. 807–810.
6. Зелиско В. Р. О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – Вып. 12. – С. 14–21.
7. Зелиско В. Р. Єдиність унітальних дільників матричного многочлена // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1988. – Вип. 30. – С. 36–38.
8. Казимирский П. С. К разложению квадратной полиномиальной матрицы в произведение линейных множителей // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 5. – С. 115–119.
9. Казимирский П. С. Матричные многочлены и уравнения // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 2. – С. 23–31.
10. Казимирский П. С. Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. – Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1976. – С. 29–40.

11. Казимирский П. С. Разложение регулярного матричного многочлена на множители // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – № 6. – С. 488–491.
12. Казимирский П. С. Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 483–493.
13. Казимирский П. С., Билонога Д. М. Полускалярная эквивалентность многочленных матриц с взаимно простыми элементарными делителями // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 4. – С. 8–9.
14. Казимирский П. С., Грынив Л.М. Приведение регулярного матричного многочлена к квазидиагональному виду // Укр. мат. журн. – 1974. – **24**, № 3. – С. 318–327.
15. Казимирский П. С., Мельник О. М. Решение вопроса полускалярной эквивалентности многочленных матриц с попарно различными характеристическими корнями // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 11. – С. 9–12.
16. Казимирский П. С., Петричкович В. М. Разложимость полиномиальной матрицы на линейные множители // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1978. – Вып. 8. – С. 3–9.
17. Казимирский П. С., Щедрик В. П. О решениях матричных многочленных односторонних уравнений // Докл. АН СССР. – 1989. – **304**, № 2. – С. 271–274.
18. Казимирський П. С. До розкладу поліноміальної матриці на лінійні множники // Доп. АН УРСР. – 1964. – № 4. – С. 446–448.
19. Казимирський П. С. Про розклад поліноміальної матриці на лінійні множники // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1965. – № 8. – С. 53–60.
20. Казимирський П. С. Про розклад поліноміальної матриці на множники // Доп. АН УРСР. – 1965. – № 7. – С. 847–849.
21. Казимирський П. С. Про одну необхідну умову розкладності поліноміальної матриці в добуток лінійних множників // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1967. – № 16. – С. 93–95.
22. Казимирський П. С. Про виділення регулярного множника з матричного многочлена // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1971. – № 8. – С. 686–687.
23. Казимирський П. С. Необхідність умов розкладу матричного многочлена на лінійні множники // Укр. мат. журн. – 1977. – **5**, № 5. – С. 653–658.
24. Казимирський П. С. Розв'язання проблеми виділення регулярного множника з матричного многочлена // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1978. – № 12. – С. 1075–1078.
25. Казимирський П. С. Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.
26. Казимирський П. С., Гринів Л. М. Виділення "великого" множника з матричного многочлена // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 4. – С. 293–297.
27. Казимирський П. С., Зеліско В. Р. Про виділення з поліноміальної матриці регулярного множника з наперед заданою формою Сміта // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 52–61.
28. Казимирський П. С., Петричкович В. М. Про еквівалентність поліноміальних матриць // Там же. – С. 61–66.
29. Казимирський П. С., Худий М. І. Про один метод виділення лінійного множника з матричного многочлена // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 5. – С. 394–395.
30. Крейн М. Г., Лангер Г. К. К теории квадратических пучков самосопряженных операторов // Докл. АН СССР. – 1964. – **154**, № 6. – С. 1258–1261.
31. Крейн М. Г., Лангер Г. К. О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов // Тр. междунар. симп. по прил. теории функций в механике сплошной среды. – М.: Наука, 1965. – Т. 2. – С. 283–322.
32. Лопатинский Я. Б. Разложение полиномиальной матрицы на множители // Науч. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. физ.-мат. – 1957. – Вып. 38. – № 2. – С. 3–7.
33. Петричкович В. М. Абсолютная разложимость матричных многочленов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1979. – Вып. 9. – С. 37–41.
34. Петричкович В. М. О линейных делителях и приводимости многочленных матриц // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 2. – С. 195–200.
35. Петричкович В. М. Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц // Там же. – 1990. – **42**, № 5. – С. 644–649.
36. Петричкович В. М. Паралельні факторизації многочленних матриць // Там же. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1228–1233.
37. Петричкович В. М., Прокип В. М. О факторизации многочленных матриц над произвольным полем // Там же. – 1986. – **38**, № 4. – С. 478–483.

38. Томецький М. І., Худий М. І. Практичне виділення регулярного множника матричного многочлена // Вісн. Львів. політехн. ін-ту – 1990. – № 242. – С. 151–153.
39. Худий М. І. Разложение полиномиальной матрицы над полем произвольной характеристики // Там же. – 1980. – № 141. – С. 94–97.
40. Шаваровський Б. З. Разложимость на множители многочленной матрицы квазипростой структуры // XVII Всесоюз. алгебр. конф., Минск, 14–17 сент. 1983г.:Тез сообщ. – Минск: Ин-т математики АН БССР, 1983. – Т. 2. – С. 263.
41. Шаваровський Б. З. Канонічна форма многочленної матриці з одним елементарним дільником відносно напівскалярно еквівалентних перетворень // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 10. – С. 33–36.
42. Bell J. H. Left associates of monic matrices with an application to unilateral matrix equations // Amer. J. Math. – 1949. – **71**. – P. 249–256.
43. Bell J. H. Families of solutions of the unilateral matrix equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1950. – N 1. – P. 151–159.
44. Ingraham M. H. Rational methods in matrix equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1941. – **47**. – P. 61–70.
45. Lancaster P. Lambda-matrices and vibrating system. – Oxford: Pergamon Press, 1966. – 196 p.
46. Roth W.E. A solution of the matrix equation $P(X)=A$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1928. – **30**. – P. 579–596.

ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ РАЗЛОЖИМОСТИ МАТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

Приведен обзор исследований по вопросам разложимости матричных многочленов на множители. Основное внимание уделено результатам, полученным П. С. Казимирским на пути к решению проблемы выделения регулярных множителей из матричного многочлена над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль.

ON INVESTIGATION OF MATRIX POLYNOMIALS FACTORIZABILITY

The paper reviews the recent investigation on matrix polynomials factorizability. The main attention is paid to the results, obtained by P.S. Kazimirsky who tried to solve the problem of the regular factors extraction over algebraically closed field zero characteristic from a matrix polynomial .

Львівський ун-т ім. І. Франка

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Ун-т «Львівська політехніка»

Одержано
18.03.94