

УДК 539.3

В. Н. Максименко, Л. А. Фильштинский

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ РЕБРА ЖЕСТКОСТИ К АНИЗОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКЕ В СЛУЧАЕ НАЛИЧИЯ МЕЖДУ НИМИ СКЛЕИВАЮЩЕГО СЛОЯ

Задача о передаче нагрузки от ребер жесткости к оболочке обычно решается в допущении непрерывного соединения ребра с оболочкой [1, 2]. В данной работе эта задача рассматривается в предположении, что между ребром и оболочкой имеется склеивающий слой постоянной толщины.

Задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Выясняется характер поведения контактных усилий. Приводятся результаты расчетов.

§ 1. Рассмотрим оболочку вращения, усиленную вдоль конгруэнтных отрезков $0 < \alpha_s < l$; $\beta_s = 2\pi s/\omega$ ($s=0, 1, \dots, \omega-1$) тонкими упругими ребрами жесткости постоянного сечения. Крепление ребер к оболочке осуществляется с помощью склеивающего слоя. Ребра нагружены на концах $\alpha_s=0$, $\beta_s=2\pi s/\omega$ ($s=0, 1, \dots, \omega-1$) одинаковыми осевыми сосредоточенными силами P .

Будем предполагать, что склеивающий слой имеет постоянную толщину h_1 и работает только на сдвиг. Ребро считаем одномерным упругим континуумом, работающим лишь на растяжение — сжатие.

Задача состоит в определении возникающих усилий в ребре и клеевом слое.

Указанная модель контакта рассматривалась в работе [7] для случая передачи нагрузки от ребра конечной длины к бесконечной пластине.

Если считать, что деформация сдвига γ и напряжение сдвига τ постоянны в любом поперечном сечении склеивающего слоя, то

$$\gamma = \frac{u_0 - u}{h_1}; \quad q = b\tau = bG\gamma. \quad (1.1)$$

Здесь $u_0(u)$ — перемещение вдоль оси α ребра (оболочки); G , b — модуль сдвига и ширина склеивающего слоя; q — погонное касательное усилие, передающееся от ребра к склейке (положительное направление для q совпадает с направлением P).

Условие равновесия ребра дает

$$-R_2 \int_0^l q(\alpha) d\alpha = P. \quad (1.2)$$

Полагая перемещение ребра как твердого целого равным нулю, имеем

$$u_0(\alpha) = R_2^2 (F_0 E_0)^{-1} \int_0^\alpha d\xi \int_\xi^l q(\eta) d\eta, \quad (1.3)$$

где E_0 , F_0 — модуль упругости и площадь поперечного сечения ребра.

Перемещение оболочки вдоль оси α от действия погонной касательной нагрузки интенсивности q , приложенной вдоль отрезков $0 < \alpha_s < l$, $\beta_s = 2\pi s/\omega$ ($s=0, 1, 2, \dots, \omega-1$) на линии контакта, имеет вид [3]

$$\begin{aligned} u(\alpha) &= \frac{R_2}{fR_2^2} \int_0^l q(\alpha_1) B_{11} E(\alpha - \alpha_1, 0) d\alpha_1 + u' = \\ &= \frac{D_{11} C_{66}}{fR_2^2} \int_0^l q(\alpha_1) \Phi(\alpha - \alpha_1) d\alpha_1 + u'; \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha) &= \left(\sum_{j=0}^6 A_j \frac{\partial^6}{\partial \alpha^j \partial \beta^{6-j}} + \sum_{j=0}^2 B_j \frac{\partial^2}{\partial \alpha^j \partial \beta^{2-j}} \right) E(\alpha, \beta) \Big|_{\beta=0} = \\ &= \frac{1}{T} \left\{ \left(A_6 \frac{d^6}{d\alpha^6} + B_2 \frac{d^2}{d\alpha^2} \right) c_0(\alpha) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{ik\omega} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sum_{v=1}^4 \frac{p(z_v^{(k)}) + q(z_v^{(k)}) (k\omega)^{-4}}{\Delta'_k(z_v^{(k)})} e^{ik\omega z_v^{(k)} |\alpha|} \right] \right\}. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{j=0}^6 A_j z^j; & q(z) &= \sum_{j=0}^2 B_j z^j; \\ A_j &= \frac{a_j^{11}}{a_6^{11}}; & B_j &= \frac{b_j^{11}}{a_6^{11}}. \end{aligned}$$

Здесь и ниже использованы обозначения работ [3, 4].

Перемещение u' из (1.4) не может быть взято произвольно, так как соответствующая постоянная в (1.3) была положена нулю.

Функция $\Phi(\alpha)$ имеет в нуле логарифмическую особенность. Выделим из $\Phi(\alpha)$ ее главную часть $\Phi_0(\alpha)$. Тогда [4]

$$\Phi(\alpha) = \Phi_0(\alpha) + \Phi_1(\alpha); \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \Phi_0(\alpha) &= \sum_{j=0}^6 A_j \frac{\partial^6 E_0(\alpha, \beta)}{\partial \alpha^j \partial \beta^{6-j}} \Big|_{\beta=0} = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[i \sum_{v=1}^4 \frac{p(z_v)}{\Delta'(z_v)} \ln 2 \sin \frac{\omega z_v |\alpha|}{2} \right] = C \ln |\alpha| + \Phi_2(\alpha); \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\Phi_2(\alpha) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ i \sum_{v=1}^4 \frac{p(z_v)}{\Delta'(z_v)} \ln \left[\omega z_v \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\omega z_v \alpha}{2k\pi} \right)^2 \right) \right] \right\};$$

$$C = \operatorname{Re} \left[\frac{i}{\pi} \sum_{v=1}^4 \frac{p(z_v)}{\Delta'(z_v)} \right];$$

$$\Phi_1(\alpha) = \frac{1}{T} \left\{ A_6 \frac{d^6(c_0(\alpha) - g_0(\alpha))}{d\alpha^6} + B_2 \frac{d^2 c_0(\alpha)}{d\alpha^2} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{ik\omega} \sum_{v=1}^4 \left(\frac{p(z_v^{(k)}) + q(z_v^{(k)})(k\omega)^{-4}}{\Delta'_k(z_v^{(k)})} e^{ik\omega z_v^{(k)}|\alpha|} - \frac{p(z_v)}{\Delta'(z_v)} e^{ik\omega z_v|\alpha|} \right) \right] \right\}.$$

Ряд для $\Phi_1(\alpha)$ имеет порядок сходимости $1/k^5$ [4]. Поэтому при вычислении $\Phi_1(\alpha)$ можно ограничиться небольшим числом членов (расчеты показывают, что брать более 20 членов нецелесообразно).

Подставляя выражение (1.3), (1.4) в (1.1) и вводя замену

$$\alpha = lx; \quad q(\alpha) = \frac{P}{R_2 l} \varphi(x); \quad k(x) = \Phi(lx),$$

получим после некоторых преобразований следующее интегральное уравнение для искомой функции $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) - A \int_0^1 k(x-t) \varphi(t) dt + B \int_0^x (t-x) \varphi(t) dt = D - Bx, \quad (1.7)$$

где

$$A = \frac{bGD_{11}C_{66}}{h_1 R_2^7 f}; \quad B = \frac{bG(R_2 l)^2}{h_1 E_0 F_0}; \quad D = \frac{u' R_2 l b G}{h_1 P}.$$

Неизвестная постоянная D , входящая в уравнение (1.7), может быть определена из условия (1.2), которое примет вид

$$\int_0^1 \varphi(t) dt = 1. \quad (1.8)$$

Постоянные A, B можно выразить через основные безразмерные параметры: $U = E_1 R_2^2 (E_0 F_0)^{-1}$ — относительная жесткость ребра; $v = bG(E_1 h)^{-1}$ — относительная жесткость склеивающего слоя; $\tau = R_2 h^{-1}$ (h — толщина оболочки); $l = L/R_2$ (L — длина ребра);

$$A = v\tau \frac{1 - v_1 v_2}{1 - C_{16}^2 (C_{11} C_{66})^{-1}}; \quad B = uv l. \quad (1.9)$$

§ 2. Уравнение (1.7) согласно (1.5), (1.6) — уравнение Фредгольма второго рода с ядром, имеющим логарифмическую особенность. Оно позволяет исследовать поведение погонных усилий взаимодействия q в окрестности концов линии контакта.

Дифференцируя (1.7), получим с учетом (1.6) следующее сингулярное, интегро-дифференциальное уравнение:

$$\varphi'(x) = B \int_0^x \varphi(t) dt - B - AC \int_0^1 \frac{\varphi(t) dt}{t-x} + \int_0^1 K(x-t) \varphi(t) dt; \quad (2.1)$$

$$K(x) = [\Phi_1(lx) + \Phi_2(lx)]'_x.$$

Значения $C, \Phi_i(x)$ ($i=1, 2$) определены формулами (1.6).

Используя асимптотические формулы поведения интегралов типа Коши в окрестности концов линии интегрирования [5], можно показать, что для $\varphi'(x)$ справедливы представления в окрестности точек $x=0$ и $x=1$

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &\approx AC\varphi(0) \ln x, \quad x \rightarrow +0; \\ \varphi'(x) &\approx -AC\varphi(1) \ln(1-x), \quad x \rightarrow 1-0.\end{aligned}\quad (2.2)$$

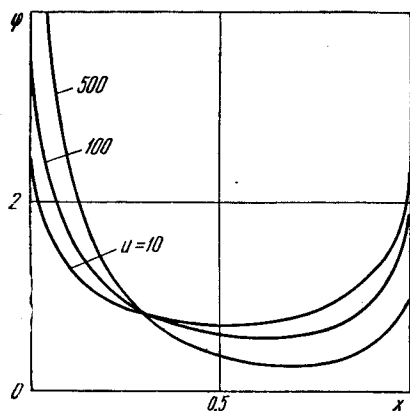


Рис. 1

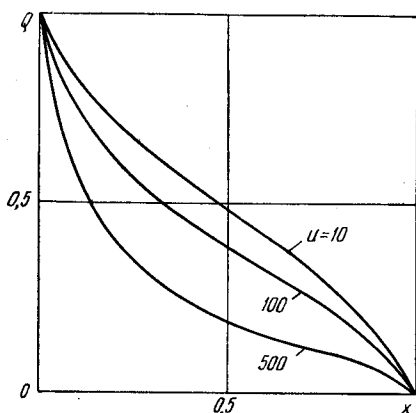


Рис. 2

Таким образом, касательные усилия, передающиеся от ребра к оболочке, имеют логарифмическую особенность в производных на обоих концах, но сами ограничены на $[0, 1]$.

Таблица 1

B	φ(0)		φ(1)		B	φ(0)		φ(1)	
	n=20	n=30	n=20	n=30		n=20	n=30	n=20	n=30
1	2,5055	2,5302	2,3062	2,3290	100	9,6650	9,8358	0,7372	0,7508
10	3,6204	3,5688	1,8848	1,9056	200	13,4672	13,7920	0,4930	0,5052
50	6,9470	7,0443	1,0726	1,0884	300	16,3014	16,7898	0,3889	0,4008

Такое поведение $\varphi(x)$ отличается от поведения касательных усилий в случае гипотезы непрерывного контакта, где $\varphi(x)$ имеет особенность типа $x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ на концах участка контакта [2, 4]. Наличие склеивающего слоя таким образом приводит к снижению концентрации контактных усилий взаимодействия в окрестности концов.

В случае, когда материал оболочки значительно жестче материала ребра, можно положить $A=0$ в (1.7). Задача сводится к решению уравнения Вольтерра вида [7]

$$\varphi(x) = B \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt + D - Bx, \quad (2.3)$$

решение которого с учетом (1.8) имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{B}}{\operatorname{sh} \sqrt{B}} \operatorname{ch} \sqrt{B}(1-x).$$

При $B \rightarrow 0$ $\varphi(x) \rightarrow 1$ и погонные касательные усилия мало отличаются от единицы. С увеличением B концентрация напряжений появля-

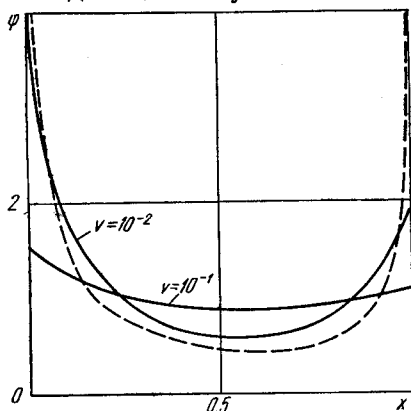


Рис. 3

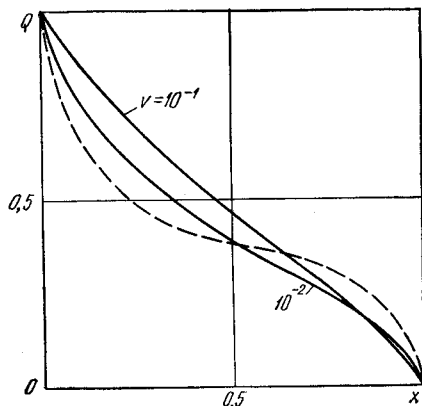


Рис. 4

ется в нагруженном конце ребра (склеивающий слой становится более жестким). При больших B $\varphi(0) \rightarrow \sqrt{B}$ $\varphi(1) \rightarrow 0$, т. е. почти вся нагрузка передается в ближайшую окрестность нагруженного конца.

§ 3. Уравнение (1.7) решалось численно [6]. При решении учитывался характер поведения искомой функции $\varphi(x)$ в окрестности концов отрезка $[0, 1]$ согласно формулам (2.2).

Ниже приводятся результаты расчетов $\varphi(x)$ и безразмерного усилия $Q(x) = P(x)/P$ в ребре для однослойных цилиндрических оболочек из стеклопластика АГ-4С ($E_1 = 2,1 \cdot 10^4$ МПа; $E_2 = 1,6 \cdot 10^4$ МПа; $G = 4,1 \times 10^3$ МПа; $\nu_2 = 0,07$) в предположении, что главные оси анизотропии совпадают с осями координат.

За независимые параметры были приняты A , B , τ , l (см. (1.7), (1.9)) и ω (количество ребер).

Результаты вычислений показали хорошую сходимость алгоритма [6]. В табл. 1 приводятся для сравнения результаты расчетов $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ в случае $A=10$, $\tau=10^2$, $l=1$, $\omega=2$ при различных значениях B , когда интервал $[0, 1]$ разбивался на $n=20$ и $n=30$ равноотстоящих узлов соответственно.

На рис. 1, 2 показаны результаты расчетов $\varphi(x)$ и $Q(x)$ при различных значениях параметра $u=10$, 10^2 , $5 \cdot 10^2$ для $\tau=10^2$, $l=1$, $\omega=2$, $\nu=10^{-1}$.

Как следует из приведенных графиков, увеличение $U = E_1 R_2^2 (E_0 F_0)^{-1}$ (относительная жесткость ребра) приводит к концентрации контактных напряжений в нагруженном конце.

Рис. 3, 4 иллюстрируют влияние склеивающего слоя на характер контактных усилий взаимодействия $\varphi(x)$ и $Q(x)$. Здесь $\tau=10^2$, $l=1$, $\omega=2$, $u=10^2$. Параметр $\nu = Gb(E_1 h)^{-1}$, характеризующий относительную жесткость склейки, полагаем равным 10^{-2} и 10^{-1} . Штриховая линия соответствует случаю отсутствия склейки [4]. Как видно из приведенных результатов вычислений $\varphi(x)$ и $Q(x)$, наличие склеивающего слоя приводит к снижению концентрации контактных усилий взаимодействия в окрестности концов.

Таблица 2

B \ A	1		10	
	$\varphi(0)$	$\varphi(1)$	$\varphi(0)$	$\varphi(1)$
1	1,4769	1,0874	2,5302	2,3290
10	3,2011	0,5191	3,6588	1,9056
50	7,0490	0,1312	7,0443	1,0887
100	9,9422	0,0774	9,8358	0,7508
200	13,9925	0,0506	13,7920	0,5052
300	17,0570	0,0418	16,7889	0,4008

B \ A	50		100	
	$\varphi(0)$	$\varphi(1)$	$\varphi(0)$	$\varphi(1)$
1	4,6507	4,5602	5,8486	5,7898
10	5,2079	4,3360	6,2149	5,6393
50	7,3549	3,5744	7,7169	5,0618
100	9,5254	2,9571	9,3628	4,5002
200	12,9125	2,2453	12,1230	3,7118
300	15,5855	1,8460	14,4122	3,1854

B \ A	200		300	
	$\varphi(0)$	$\varphi(1)$	$\varphi(0)$	$\varphi(1)$
1	6,9682	6,9326	7,5115	7,4858
10	7,1915	6,8393	7,6732	7,4177
50	8,1415	6,4556	8,3705	7,1307
100	9,2432	6,0373	9,1975	6,8042
200	11,2160	5,3574	10,7238	6,2403
300	12,9511	4,8290	12,1088	5,7708

В табл. 2 даны результаты расчетов $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ при различных значениях A и B . Здесь полагалось $\tau=10^2$, $\omega=2$, $l=1$, $n=30$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С. Ребристые цилиндрические оболочки. К., «Наук. думка», 1973. 248 с.
2. Григолюк Э. И., Толкачев В. М. О передаче усилий от ребер жесткости к цилиндрической оболочке.— В кн.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1969, с. 177—181.
3. Максименко В. Н., Фильштинский Л. А. Упругое поведение анизотропных оболочек под действием нагрузок, сосредоточенных на линиях.— Изв. АН СССР. Мех. твердого тела, 1974, № 5, с. 57—66.
- ✓ 4. Максименко В. Н., Фильштинский Л. А. Упругое равновесие анизотропных оболочек, подкрепленных ребрами жесткости.— Прикл. мат. и мех., 1975, 39, № 5, с. 900—908.
5. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968. 511 с.
6. Atkinson K. The numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind with singular kernels.— Numer. Math., 1972, 19, № 3, p. 248—259.
- ✓ 7. Lubkin J. L., Lewis L. C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bonded to an infinite sheet.— Quart. Journ. Mech. and Appl. Math., 1970, 33, № 4, p. 521—533.